ワイル多様体のコンタクト構造とDeformation Quantization (力学系と微分幾何学)

数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 1-17

ワイル多様体のコンタクト構造と Deformation Quantization

吉岡 朗
Akira Yoshioka

東京理科大学工学部

1 序文

本稿で扱う主題は Deformation quantization の幾何学である。したがって主定理 (定理 6 と定理 7) は Deformation quantization との関係の中で理解されるものであるが, この関係についてすなわち問題の背景については第 2 章のはじめに述べることにして, ここでは本稿の主結果のみを掲げる。

(M, σ_M) を $2n$ 次元シンプレクテック多様体とする。M 上に, ワイル代数 W をファイバーとし**ワイル多様体**と呼ばれる algebra bundle W_M が存在することが知られている ([OMY])。

ここで, ワイル代数 W とは, 正準交換関係とよばれるある関係式 (本文中の (4) を参照) をみたす $2n+1$ 個の不定元 $Z^1, Z^2, \cdots, Z^{2n}, \nu$ により生成された, 実数体 $\mathbf{R}$ 上の結合代数である。

ワイル多様体 W_M に対し, ν をパラメータとし $H^2(M)$ を係数に持つ形式的冪級数 $H^2(M)[[\nu^2]]$ に値をとり **Poincaré-Cartan class** と呼ばれる特性類 $c(W_M)$ が考えられた ([OMMY])。$c(W_M)$ はワイル多様体の完全不変量を与える, すなわちワイル多様体の同値類から $H^2(M)[[\nu^2]]$ への写像となり, しかも全単写となるものである。したがって, M 上のワイル多様体全体のモデュライ空間 (ワイル多様体全体の同型類全体の集合) は $H^2(M)[[\nu^2]]$ である。

さて

- ワイル代数にさらに実 1 次元の空間を直和して得られ, コンタクト代数と呼ばれる無限次元のリー代数 $\mathcal{C}$ と
- ワイル多様体 W_M の Poincaré-Cartan class $c(W_M)$ を与える

– Čech 2-cocycle $\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$,

$$c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2) = c^{(0)}_{\alpha\beta\gamma} + c^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}\nu^2 + \cdots, \quad c^{(2k)}_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbf{R},$$

および

– closed 2-form $\Omega(W_M)(\nu^2) \in \Lambda^2(M)[[\nu^2]]$

をそれぞれ考える。

結果は次のものである。

1. $c(W_M)$ を与えるČech 2-cocycle $\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ を用いて, W_M の張り合わせの bundle isomorphisms を $\mathcal{C}(\supset W)$ を fiber とする bundle isomorphisms へと拡張して、コンタクト代数を fiber として持ち W_M を部分束とする M 上の algebra bundle C_M を構成した。(本文中の定理 6).
2. さらに bundle $\mathcal{C}_M$ 上に, $\Omega(W_M)(\nu^2)$ を曲率に持つ接続（$\Lambda_M \otimes W_M$ の切断に作用する共変外微分作用素）を構成した。(本文中の定理 7).

注意 1 *1.* 接続は W_M に制限したとき *Fedosov* の接続、$\Omega(W_M)(\nu^2)$ は *Fedosov* の接続の"曲率"と一致することが示せる。この意味で *Fedosov* の接続の拡張を構成した, と見ることが出来る。

2. このとから, *Čech 2-cocycle* により与えられる *Poincaré-Cartan class* と *closed 2-form* である *Fedosov* の接続の " 曲率 " $Omega(W_M)(\nu^2)$ により与えられる特性類とが一致することが示せた。

2 Deformation quantization とワイル多様体

Deformation quantization は Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz そして Sternheimer [BFFLS] 達によって初めに提唱された概念で,

一言で述べると古典力学系を作用素を用いずに量子化しようというアイデアである。数学的に述べると, 正準交換関係をみたす元によって生成された非可換結合的な代数を, 作用素を用いる代わりに形式的なパラメータ ν を導入し, 多様体 M 上の関数を係数とする形式的冪級数 $C^\infty(M)[[\nu]]$ の枠内で実現するアイデアである, と言うことが出来る。

Deformation quantization の存在は M がシンプレクティック多様体の場合に DeWilde-Lecomte [DL] によって証明されポアソン多様体の場合に Kontsevich [K] によって証明された。彼らの結果により Deformation quantization はすべてのポアソン多様体に対していつも考えられるという, 非常に一般的な概念であることが明らかになった。

シンプレクティック多様体の場合 Deformation quantization の同値類はいわゆる Fedosov connection の曲率を用いて記述されることが示され (例えば Cahen-Gutt [BCG], Xu [X] を参照), また大森-前田-宮崎-吉岡 [OMMY] によって Poincaré-Cartan クラスによって記述できることが示された。(Deligne [D], Gutt-Rawnsley [GR] 達の結果も参照していただきたい。)

またシンプレクティック多様体の場合 Deformation quantization は幾何学的な描像を持つことが明らかにされた。例えば Fedosov [F] によるいわゆる Fedosov connection を用いた描像 (Weinstein [W] も参照) と大森-前田-吉岡によるワイル多様体 [OMY] を用いた描像がある。

本稿ではワイル多様体を用いてこの幾何学的な描像がどのようにして Deformation quantization から現れてくるのかを説明し Deformation quantization とワイル多様体の関係を述べてみたい。またワイル多様体の議論を発展させてワイル多様体の上にコンタクト構造 (正確には M 上のコンタクト代数束) が考えられることおよびこの代数束上にある接続が構成できること ([Y]) を述べる。この接続を用いてワイル多様体と Fedosov の描像とを具体的に結び付けることが出来るというのが結論である。

まず この章で [OMY] の概説から始める。

2.1 Deformation quantization の定義

不定元 ν を導入し, M 上の滑らかな関数の集合を係数とする形式的冪級数の空間を $\mathcal{A}_\nu(M) = C^\infty(M)[[\nu]]$ とする。 $\mathcal{A}_\nu(M)$ の元は

$$\mathcal{A}_\nu(M) \ni f = f_0 + \nu f_1 + \nu^2 f_2 + \cdots, \quad (\, f_k \in C^\infty(M))$$

の形で表される。

$\mathcal{A}_\nu(M)$ に $\mathbf{R}[[\nu]]$-bilinear な積 $* : \mathcal{A}_\nu(M) \times \mathcal{A}_\nu(M) \to \mathcal{A}_\nu(M)$ を考える。

定義 1 $*$ が *star* 積であるとは次の条件が成立することである。

1. 関数 $f, g \in \mathcal{A}(M)$ に対して

$$f * g = fg + \frac{\nu}{2}\{f, g\} + \nu^2 \pi_2(f, g) + \cdots + \nu^k \pi_k(f, g) + \cdots$$

と展開され, $\pi_k(f, g) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad (k = 2, 3, \cdots)$ は *bidifferential operators* である。

2. $\forall f \in \mathcal{A}_\nu(M)$ に対し $\nu * f = f * \nu$
3. $\forall f, g, h \in \mathcal{A}_\nu(M)$ に対して $f * (g * h) = (f * g) * h.$

$(\mathcal{A}_\nu(M), *)$ をシンプレクティック多様体 (M, σ_M) の *Deformation quantization* と呼ぶ。

注意 2 この定義はポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ が与えられれば意味を持つことが分かるが，この場合には $(\mathcal{A}_\nu(M), *)$ をポアソン代数 $(\mathcal{A}(M), \{\ ,\ \})$ の *Deformation quantization* と呼ぶ。

もっとも典型的であり，この稿において重要な意味合いを持つ次の例を掲げる。

例 1 $2n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{2n}$ をとりその座標系を $(z^1, z^2, \cdots, z^{2n})$ とする。標準的なシンプレクティック形式 $\sigma_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \omega_{ij}\, dz^i \wedge dz^j$ を考える。ここで ω_{ij} は $\omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ なる $2n \times 2n$ 行列である。関数 f, g に対するポアソン括弧は記号 $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^i}}$, $\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z^j}}$ および行列 $\Lambda = (\Lambda^{ij}) = \omega^{-1}$ を用いて

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial g}{\partial z^j} = f\left(\sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z^j}}\right) g$$

のように表される。

右辺の表記法を使って，シンプレクティック多様体 $(\mathbf{R}^{2n}, \sigma_0)$ に ***Moyal* 積**と呼ばれる次の *star* 積が定義できる。

展開 $\exp\left(\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z^j}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z^j}}\right)^k$ を用いて

$$\begin{aligned} f *_0 g &= f \exp\left(\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z^j}}\right) g \\ &= fg + \frac{\nu}{2}\{f, g\} + \nu^2 \pi(f, g) + \cdots . \end{aligned} \tag{1}$$

また $\overline{\nu} = -\nu$ とおけば $\overline{f *_0 g} = \overline{g} *_0 \overline{f}$ が成立し，$\overline{(\cdot)}$ は Moyal 代数 $(\mathcal{A}_\nu(\mathbf{R}^{2n}), *_0)$ の anti-involution を定める。

Moyal 積の重要性は次の定理によって明らかである。

定理 1 開球と同相な任意の部分集合 $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ 上の任意の *star* 積 $*$ は *Moyal* 積と同型である。すなわち $T_k : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(U)$ $(k = 1, 2, \cdots)$

を微分作用素とする $\mathcal{A}_\nu(U)$ の $\mathbf{R}[[\nu]]$-線形同型写像 $T = Id + \nu T_1 + \nu^2 T_2 + \cdots + \nu^k T_k + \cdots$ が存在して

$$f * g = T^{-1}(T(f) *_0 T(g))$$

が成立する。

2.2 Deformation quantization の"非可換多様体"の描像

前節最後の定理により我々は自然に次の幾何的な描像を得る。$*$ をシンプレクティック多様体 (M, σ_M) の任意の star 積とする。$\{V_\alpha\}_\alpha$ を M の開被覆, $U_\alpha \subset \mathbf{R}^{2n}$ を開球と同相な部分集合で $(z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^{2n})$ をその座標系, $\varphi_\alpha : (V_\alpha, \sigma_M) \to (U_\alpha, \sigma_0)$ をシンプレクティック写像すなわち $\varphi_\alpha(p) = (z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^{2n})$ が正準座標系を与えるものとする。

さて定義により star 積の展開の各項 π_k は微分作用素であるから各 V_α に制限可能である。したがってこの制限により $*$ から deformation quantization $(C^\infty(V_\alpha)[[\nu]], *)$ を得, これを局所座標系 $(U_\alpha, (z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^{2n}))$ を用いて表示して deformation quantization $(\mathcal{A}_\nu(U_\alpha), *_\alpha)$ を得る。さらに定理 1 により Moyal 代数への $\mathbf{R}[[\nu]]$-同型 $T_\alpha : (\mathcal{A}_\nu(U_\alpha), *_\alpha) \to (\mathcal{A}_\nu(U_\alpha), *_0)$ が存在し, この同型をたどれば Moyal 代数の同型

$$T_{\alpha\beta} = T_\beta T_\alpha^{-1} : (\mathcal{A}_\nu(U_{\alpha\beta}), *_0) \to (\mathcal{A}_\nu(U_{\beta\alpha}), *_0), \tag{2}$$

(ただし $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$) が存在することになる。この考察を座標近傍ごと行えば Moyal 代数の族 $\{(\mathcal{A}_\nu(U_\alpha), *_0)\}$ が同型の族 $\{T_{\alpha\beta}\}$ で貼り合わさっているといういわば"非可換多様体"の描像が得られたことになる。これがワイル多様体のモチベーションである。

次節以降でこれらの族からどのようにしてワイル代数をファイバーにもつ無限次元多様体の概念が生まれてくるのかを解説し, ワイル多様体の定義を与える。

2.3 ワイル関数とワイル同型写像

多様体 M からひとまず離れて抽象的なワイル代数 W を考える。我々の基本的なアイデアは, 一言でいってしまえば, 多様体上の関数のなす形式的冪級数を W に埋め込み, Moyal 代数をワイル代数の枠組みのなかで扱うということにある。

まずワイル代数 W を定義する。$2n+1$ 個の不定元 $\nu, Z^1, Z^2, \cdots, Z^{2n}$ をとり $\mathbf{R}$ を係数とする形式的冪級数環 $\mathcal{R}_\nu = \mathbf{R}[[\nu, Z^1, Z^2, \cdots, Z^{2n}]]$ を考

える。$\mathcal{R}_\nu$ の元は無限和 $a = \sum_{l\alpha} a_{l\alpha}\nu^l Z^\alpha$, $(a_{l\alpha} \in \mathbf{R})$ で表される。$\mathcal{R}_\nu$ には通常の意味での形式的冪級数の可換な積があり,

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n})$ は多重指数そして $Z^\alpha = (Z^1)^{\alpha_1} \cdots (Z^{2n})^{\alpha_{2n}}$ である。$\mathcal{R}_\nu$ に形式的冪級数の位相をいれる, すなわち $\mathcal{R}_\nu$ の列がある元に収束するとは各係数 $a_{l\alpha}$ が収束することとする。

Moyal 積に同型な積 $\hat{*}$ を考える。

$$a \hat{*} b = a \exp\left(\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda^{ij} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial Z^i}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial Z^j}}\right) b, \quad a, b \in W. \tag{3}$$

$\hat{*}$ は結合的かつ $\mathcal{R}_\nu$ の位相に関して連続である。

定義 2 形式的冪級数環 $\mathcal{R}_\nu$ に積 $\hat{*}$ を考えたとき W と表しワイル代数と呼ぶ。

次の補題が簡単な計算で確かめられる。

補題 1 W の成生元 $\nu, Z^1, Z^2, \cdots, Z^{2n}$ は正準交換関係 (canonical commutation relation; CCR)

$$[\nu, Z^i] = 0,\ [Z^i, Z^j] = \nu\Lambda^{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots, 2n \tag{4}$$

をみたす。ただし $[a, b] = a \hat{*} b - b \hat{*} a$, $(a, b \in W)$ である。

さらに関係 $\overline{\nu} = -\nu$, $\overline{Z^i} = Z^i$, $i = 1, 2, cdots, 2n$ により anti-involution $\overline{a \hat{*} b} = \overline{b} \hat{*} \overline{a}$ を入れる。また $d(\nu) = 2$, $d(Z^i) = 1$, $i = 1, 2, \cdots, 2n$ とおき単項式 $\nu^l Z^\alpha$ の次数を $d(\nu^l Z^\alpha) = 2l + |\alpha|$ とする。

さて Moyal 代数を W の中に埋め込むことを考える。そのためにワイル代数の局所自明な束をとる, すなわち $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合 U をとり, W と U との直積束を $W_U = W \times U$ とおく。滑らかな切断のなす空間を $Gamma(W_U)$ とする。$\Gamma(W_U)$ には各点ごとの積をとることにより結合的な積 $\hat{*}$ が自然に導入され, smooth topology に関して完備な位相代数の構造が与えられる。

Taylor 展開の考えかたを用いて次の写像を導入する。

$$\# : \mathcal{A}_\nu(U) \to \Gamma(W_U), \quad f \mapsto f^\#(z) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_z^\alpha f(z) Z^\alpha. \tag{5}$$

$f^\#$ を f の**Weyl continuation** と呼ぶ。

$$\mathcal{F}(W_U) = \{f^\# \mid f \in \mathcal{A}_\nu(U)\} \tag{6}$$

とおき $\mathcal{F}(W_U)$ の元を (U の) **ワイル関数**と呼ぶ。簡単な計算で $\partial_{Z^i} f^\# = (\partial_{z^i} f)^\#$ が分かり次の補題が得られる。

補題 2 (i) $f^{\#} \hat{*} g^{\#} = (f *_0 g)^{\#}, \quad f, g \in \mathcal{A}_\nu(U)$. したがって $\mathcal{F}(W_U)$ は $\Gamma(W_U)$ の部分代数となり

(ii) $\# : (\mathcal{A}_\nu(U), *_0) \to (\mathcal{F}(W_U), \hat{*})$ は代数の同型を与える。

Moyal 代数の同型写像 $T : (\mathcal{A}_\nu(U'), *_0) \to (\mathcal{A}_\nu(U), *_0)$ があるとせよ。上の補題により T はワイル関数族の同型写像を自然に誘導するが, これがワイル代数束のある同型写像 $\Phi : W_U \to W_{U'}$ の引き戻しとして与えられることが示せる ([OMY])。この Φ は単なる束の同型写像ではなく, Moyal 代数の同型から誘導されたものであり, ある特別な性質を有する。ここにワイル同型写像の概念が設定される理由がある。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(W_{U'}) & \xrightarrow{\Phi^*} & \mathcal{F}(W_U) \\ \#\uparrow & & \uparrow\# \\ \mathcal{A}_\nu(U') & \xrightarrow{\mathrm{T}} & \mathcal{A}_\nu(U) \end{array} \tag{7}$$

定義 3 同型写像 $\Phi : W_U \to W_{U'}$ が条件

1. $\Phi(\nu) = \nu$
2. $\overline{\Phi(a)} = \Phi(\overline{a})$
3. $\Phi^* \mathcal{F}(W_{U'}) = \mathcal{F}(W_U)$

をみたすとき**ワイル同型写像**であると呼ぶ。

ワイル同型写像の引き戻しを関数の weyl continuation $f^{\#}$ $(f \in C^\infty(U'))$ に作用させると定義の条件 3 からワイル関数になるが, 条件 2 から ν の偶数べきで展開されていることが分かり,

さらに引き戻しが $\Phi^* f^{\#}(z) = \Phi_z^{-1} f^{\#}(\varphi(z))$ であるから

$$\Phi^* f^{\#}(z) = (\varphi^* f)^{\#}(z) + \nu^2 g_2^{\#}(z) + \cdots + \nu^{2k} g_{2k}^{\#}(z) + \cdots \tag{8}$$

の形に表されることがわかる。ただし $\varphi : U \to U'$ はワイル同型写像により誘導された微分同相写像, $g_{2k} \in C^\infty(U)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ である。また補題 2 (i) の式から $[f_1^{\#}, f_2^{\#}] = \nu\{f_1, f_2\}^{\#} + O(\nu^3)$, これに上式 (??) を適用すれば $\{\varphi^* f_1, \varphi^* f_2\} = \varphi^*\{f_1, f_2\}$ を得る。すなわち

補題 3 ワイル同型写像により誘導された微分同相写像はシンプレクティック同相写像になる。

逆が成立する。

定理 2 ([OMY]) U, U' を $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合とし, $\varphi : U \to U'$ をシンプレクティック同相写像とする。

(i) φ を誘導するワイル同型写像 $\Phi: W_U \to W_{U'}$ が存在する。

(ii) $U' = U$ かつ φ が恒等写像のとき, φ を誘導するワイル同型写像 Φ はあるワイル関数を用いた内部自己同型で与えられる。すなわち

$$\Phi = \exp \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}\,(h^{\#}), \quad (h = h_0 + \nu h_1 + \cdots + \nu^j h_j + \cdots)$$

ただし $\frac{1}{\nu} \mathrm{ad}\,(h^{\#}) = \frac{1}{\nu}[h^{\#},\ bullet]$ であり, $h_0,\ h_{2k+1} \in \mathbf{R}$, $h_{2k} \in C^\infty(U)$, $(k = 1, 2, \cdots)$ である。

(iii) Φ が恒等写像であれば (ii) における関数 h_{2k} $(k = 1, 2, \cdots)$ は定数になる。

2.4 ワイル多様体と Deformation quantization

さてワイル代数をファイバーとする局所自明束とその同型写像のクラスが与えられると, 標準的なやり方で多様体上のファイバー束のクラスが定義できる。ここで貼りあわせをワイル同型写像にとったものがワイル多様体であると言うことが出来る訳だが, 以下でこれをもう少し具体的に述べてみたい。

(M, σ_M) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とし局所座標系, 座標変換などは §2.2 の始めに掲げた記号を用いる。

W_M をワイル代数をファイバーにする M 上の局所自明束とし, $\Phi_\alpha: W_{V_\alpha} \to W_{U_\alpha} = W \times U_\alpha$ を局所自明化で $\varphi_\alpha: V_\alpha \to U_\alpha$ を誘導写像に持つものとする。束 W_M の貼り付け写像を $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}: W_{U_{\alpha\beta}} \to W_{U_{\beta\alpha}}$ $(U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta))$ と記す。

定義 4 局所自明束 W_M が**ワイル多様体**であるとは貼り付け写像 $\Phi_{\alpha\beta}$ がそれぞれワイル同型写像であるときを言う。ワイル多様体の滑らかな切断 $\tilde{f} \in \Gamma(W_M)$ が **ワイル関数**であるとはそれぞれの自明化においてワイル関数になること, すなわち
$\Phi_\alpha^{*-1} \tilde{f} \in \mathcal{F}(W_{U_\alpha})$ が成立することとする。

我々は次の存在定理をもつ。

定理 3 ([OMY]) 任意のシンプレクティック多様体 (M, σ_M) にワイル多様体 W_M が存在する。

star 積があればワイル多様体が自然に浮かび上がってくることを述べてきたが, 今度はワイル多様体が存在すれば star 積が構成できること, つまり定理 3 から deformation quantization の存在が導けることを述べる。

f を $\mathcal{A}_\nu(M)$ の任意の元とする。それぞれの $V_\alpha\ subset M$ について切断 $f^{\#_\alpha} \in \Gamma(W_{V_\alpha})$ を $f^{\#_\alpha} = \Phi_\alpha^*(\varphi_\alpha^{*-1}f)^\#$ により与える。もし f の台 (support) が V_α に含まれていれば $f^{\#_\alpha}$ はワイル多様体 W_M のワイル関数を定める。$\{\chi_\alpha\}$ を $\{V_\alpha\}$ に属する 1 の分解とし, 次の写像を考える。

$$\mathcal{I} : \mathcal{A}_\nu(M) \to \mathcal{F}(W_M), \quad \mathcal{I}(f) = \sum_\alpha (\chi_\alpha f)^{\#_\alpha} \tag{9}$$

定理 4 ([OMY]) $\mathcal{I}$ は $\mathbf{R}[[\nu]]$-線形同型写像を与え

$$\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(f) \hat{*} \mathcal{I}(g)) = fg + \frac{\nu}{2}\{f,g\} + \nu^2\pi_2(f,g) + \cdots$$

の形の展開をもつ。

ここで $f,g \in \mathcal{A}_\nu(M)$ に対して積 $*$ を $f * g = \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(f) \hat{*} \mathcal{I}(g))$ とおけば明らかに結合的であり, 定理の展開式から $*$ は star 積を与えていることが確かめられる。定理 3 と定理 4 から De Wilde-Lecomte の定理 (citedl) の別証明が得られる。

系 1 任意のシンプレクティック多様体 (M, σ_M) に *star* 積が存在する, したがって任意の (M, σ_M) は *deformation quantizable* である。

3 コンタクト代数と Poincaré-Cartan クラス

ワイル代数 W の中心と反応する元を W に加えて代数を拡大し, ワイル多様体の中心元たちからの情報を引き出すことを考える。この拡大された代数 $\mathcal{C}$ がコンタクト代数であるが, これを用いて貼りあわせの同型写像の族 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ から Čech 2-cocycle $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ が得られる。$\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ の定めるコホモロジークラスがワイル多様体 W_M の Poincaré-Cartan クラスと呼ばれるものである。

まずコンタクト代数を導入する。

3.1 コンタクト代数

W の線形写像 D を次数 d を用いて $D(\nu^l Z^\alpha) = d(\nu^l Z^\alpha)\,\nu^l Z^\alpha$ により定める。

$$D([\nu, Z^i]) = [D(\nu), Z^i] + [\nu, D(Z^i)]$$
$$D([Z^i, Z^j]) = [D(Z^i), Z^j] + [Z^i, D(Z^j)]$$

が簡単に確かめられ D が代数 W の derivation となることが分かる。

さて不定元 τ を導入し D を用いて括弧積 $[\tau, a] = \nu D(a), (a \in W)$ を定義する。τ は関係

$$[\tau, \nu] = 2\nu^2,\ [\tau, Z^i] = \nu Z^i \tag{10}$$

をみたし, 明らかに $[\tau, W] \subset \nu W$ をみたす。集合 $\mathcal{C} = \mathbf{R}\tau \oplus W$ を考えそれらの元 $\lambda_i \tau + f_i$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $f_i \in W$, $(i = 1,2)$ に対して括弧積を

$$[\lambda_1 \tau + f_1, \lambda_2 \tau + f_2] = \lambda_1[\tau, f_2] - \lambda_2[\tau, f_1] + [f_1, f_2]$$

(ただし $[f_1, f_2] = f_1 \hat{*} f_2 - f_2 \hat{*} f_1$) とする。D が derivation であることから $[\ ,\ ]$ が Jacobi 律をみたすことが従い $(\mathcal{C}, [\ ,\ ])$ はリー環の構造を持つ。

定義 5 リー環 $(\mathcal{C}, [\ ,\ ])$ を**コンタクト代数**と呼ぶ。

$\overline{\tau} = \tau$ とおき $(\mathcal{C}, [\ ,\ ])$ は anti- involution の構造を持つものとする。

ワイル代数の元 f に対してコンタクト代数の derivation ad $\frac{1}{\nu} f$ を

$$\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\,f(\tau) = [\frac{1}{\nu}f, \tau] = 2f + \frac{1}{\nu}[f, \tau],\ \mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\,f(g) = \frac{1}{\nu}[f, g],\ (g \in W) \tag{11}$$

により定める。

3.2 コンタクトワイル同型写像

U を $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合とし, 直積 $\mathcal{C}_U = \mathcal{C} \times U$ を考える。明らかに $W_U \subset \mathcal{C}_U$ である。まず, ワイル同型写像 $\Phi : W_U \to W_{U'}$ がコンタクト代数束の同型写像 $\tilde{\Phi} : \mathcal{C}_U \to \mathcal{C}_{U'}$ に拡張するための条件を考える。

コンタクト代数束の滑らかな切断の全体を $\Gamma(\mathcal{C}_U)$ とおき, 元

$$\tau_U(z) = \tau + \sum_{ij} \omega_{ij} z^i Z^j \in \Gamma(\mathcal{C}_U),\ (z \in U) \tag{12}$$

を考える。

命題 1 エルミート性 $\overline{\tilde{\Phi}(\lambda\tau + f)} = \tilde{\Phi}\overline{(\lambda\tau + f)}$ をみたすコンタクト代数束の同型写像 $\tilde{\Phi} : \mathcal{C}_U \to\ mathcal{C}_{U'}$ が W_U に制限されたときワイル同型写像となるための条件は, あるワイル関数 $f^{\#} \in \mathcal{F}(W_U)$ と冪級数 $h(\nu^2) = h_0 + \nu^2 h_2 + \cdots + \nu^{2k} h_{2k} + \cdots \in C^\infty(U)[[\nu^2]]$ が存在して

$$\tilde{\Phi}^* \tau_{U'} = \tau_U + f^{\#} + h(\nu^2)$$

が成立することである。

命題1の条件をみたす同型写像 $\tilde{\Phi}$ を**modified** コンタクトワイル同型写像 (MCWD) と呼ぶ。このとき $f^{\#}$ は $\mathbf{R}[[\nu^2]]$ の元を除き一意的に定まる。また modified コンタクトワイル同型写像において $h(\nu^2)$ が $\mathbf{R}[[\nu^2]]$ の元であるとき, $\tilde{\Phi}$ を**コンタクトワイル同型写像**(CWD) と呼ぶ。CWD と MCWD の差は $\Gamma(W_U)$ の中心元の定める内部自己同型の分だけある。すなわち

補題 4 *CWD* $\tilde{\Phi}:\mathcal{C}_U\to\mathcal{C}_{U'}$ にたいして任意の $h(\nu^2)\in C^\infty(U)[[\nu^2]]$ の定める合成写像 $\tilde{\Phi}\circ\exp\, ad\frac{1}{\nu}h(\nu^2)$ は *MCWD* を与える。逆に任意の *MCWD* はある *CWD* $\tilde{\Phi}$ と冪級数 $h(\nu^2)$ を用いて $\tilde{\Phi}\circ\exp\, ad\frac{1}{\nu}h(\nu^2)$ の形に表せる。

ワイル同型写像は常に CWD, MCWD として拡張が可能である。すなわち

命題 2 (i) ワイル同型写像 $\Phi : W_U \to W_{U'}$ は $\tilde{\Phi}|_{W_U} = \Phi$ なる CWD $\tilde{\Phi}:\mathcal{C}_U\to\mathcal{C}_{U'}$ を持つ。このような CWD の拡張は定数を除き一意的である, すなわち $\tilde{\Phi}$ と $\tilde{\Phi}'$ をそれぞれ Φ の CWD としての拡張とするとただひとつ $c(\nu^2) = c_0+\nu^2c_2+\cdots+\nu^{2k}c_{2k}+\cdots\in\mathbf{R}[[\nu^2]]$ が存在して $\tilde{\Phi}'=\exp\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\,c(\nu^2)\circ\tilde{\Phi}$ をみたす。

(ii) ワイル同型写像が恒等写像のとき CWD としての拡張 $\tilde{\Phi}$ はある $c(\nu^2)\in\mathbf{R}[[\nu^2]]$ が存在して $\tilde{\Phi}=\exp\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\,c(\nu^2)$ のように表される。

3.3 Poincaré-Cartan クラス

前節で与えたCWD の拡張を用いて Poincaré-Cartan クラスが以下のようにして定義できる。

ワイル多様体 W_M の局所自明化の族 $\{\Phi_\alpha : W_{V_\alpha}\to W_{U_\alpha}\}$ からワイル同型写像の貼りあわせの族 $\{\Phi_{\alpha\beta}=\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1} : W_{U_{\alpha\beta}}\to W_{U_{\beta\alpha}}\}$ が得られた。命題2よりそれぞれの $\Phi_{\alpha\beta}$ にたいしCWD の拡張 $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}:\mathcal{C}_{U_{\alpha\beta}}\to\mathcal{C}_{U_{\beta\alpha}}$ をとる。ここで適当に定数を調整して $\tilde{\Phi}_{\beta\alpha}=\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}^{-1}$ としてかまわない。貼りあわせは $\Phi_{\gamma\alpha}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\alpha\beta}=\mathrm{Id}$ をみたすから命題2 (ii) よりある $c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\in\mathbf{R}[[\nu^2]]$ が存在して

$$\tilde{\Phi}_{\gamma\alpha}\tilde{\Phi}_{\beta\gamma}\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}=\exp\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\,c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2) \tag{13}$$

が成立する。この $\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ は次の命題により幾何的な意味をもつことがわかる。

命題 3 (i) $\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ はČech 2-cocycle を定める。

(ii) $c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)$ の取り方はコバウンダリーを除き一意的である。

(iii) $c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2) = c_{(0),\alpha\beta\gamma} + \nu^2 c_{(2),\alpha\beta\gamma} + \cdots$ で与えられる最低次の項のコホモロジークラスはシンプレクティック構造の定めるコホモロジークラスと一致する：$[c_{(0),\alpha\beta\gamma}] = [\sigma_M]$

したがって特に命題3 (ii) よりČech 2-cocycle $\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ の定めるコホモロジークラス $H^2(M)[[\nu^2]]$ の元はCWDの取り方によらず, ワイル多様体 W_M から定まるものとしてよく, これを

$$\begin{aligned} c(W_M) &= [\sigma_M] + \nu^2[c_{(2),\alpha\beta\gamma}] + \cdots + \nu^{2k}[c_{(2k),\alpha\beta\gamma}] + \cdots \\ &\in [\sigma_M] + \nu^2 H^2(M)[[\nu^2]] \end{aligned} \tag{14}$$

と表しワイル多様体 W_M の**Poincaré-Cartan** クラスと呼ぶ。

次が成立する。

定理 5 ([OMMY]) *Poincaré-Cartan* クラスはワイル多様体のファイバー束としての同型類 $\{W_M\}/_\sim$ から $[\sigma_M] + \nu^2 H^2(M)[[\nu^2]]$ への全単写を与える。$c : \{W_M\}/_\sim \xrightarrow{\sim} [\sigma_M] + \nu^2 H^2(M)[[\nu^2]]$.

4 コンタクト代数束と接続

前節においてコンタクト代数$\mathcal{C}$を導入し, これを用いてPoincaré-Cartanクラス $c(W_M)$ を定義した。この節ではさらに $c(W_M)$ を用いて modified コンタクトワイル同型写像 (MWCD) による貼りあわせの族を構成し, $\mathcal{C}$ をフアィバーにもつ M 上のコンタクト代数束$\mathcal{C}_M$ を与える。また$\mathcal{C}_M$ 上に, 曲率の定めるコホモロジークラスがPoincaré-Cartan クラスと同じになるような接続が存在することを述べる。

4.1 コンタクト代数束

$\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ を Poincaré-Cartan クラス $c(W_M)$ を与えるČech 2-cocycle とする。定義からコンタクトワイル同型写像 (CWD) の貼りあわせの族 $\{\tilde{\Phi}_{\alpha\beta} : \mathcal{C}_{U_{\alpha\beta}} \to \mathcal{C}_{U_{\beta\alpha}}\}$ は条件 (13) をみたす。

Čech 2-cocycle は $c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2) = c^{(0)}_{\alpha\beta\gamma} + \nu^2 c^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} + \cdots + \nu^{2k} c^{(2k)}_{\alpha\beta\gamma} + \cdots$ なる展開をもつとする。M の開被覆 $\{V_\lambda\}_\lambda$ に属する単位の分解 $\{\chi_\lambda\}$ を用いて関数 $h^{(2k)}_{\alpha\beta} = \sum_\lambda c^{(2k)}_{\alpha\beta\lambda}\chi_\lambda \in C^\infty(M)$, $k = 0,1,2,\cdots$ を定義し M 上の冪級数の族 $\{h_{\alpha\beta}(\nu^2)\}_{\alpha\beta}$ を $h_{\alpha\beta}(\nu^2) = \sum_{k=0}^\infty h^{(2k)}_{\alpha\beta}\nu^{2k} \in C^\infty(M)[[\nu^2]]$ により与える。$\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}$ のコサイクル条件から

$$h^{(2k)}_{\alpha\beta} = -h^{(2k)}_{\beta\alpha}, \quad h^{(2k)}_{\alpha\beta} + h^{(2k)}_{\beta\gamma} + h^{(2k)}_{\gamma\alpha} = c^{(2k)}_{\alpha\beta\gamma} \tag{15}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$ が分かる。

さてこれらを用いて $\{\mathcal{C}_{U_\alpha}\}$ の貼りあわせを構成する。まず局所座標系により関数 $\tilde{h}_{\alpha\beta}(\nu^2) = \varphi_\alpha^{-1*} h_{\alpha\beta}(\nu^2) \in C^\infty(U_\alpha)[[\nu^2]]$ を定義し, 補題4によりMCWDを

$$\widehat{\Phi}_{\alpha\beta} = \tilde{\Phi}_{\alpha\beta} \circ \exp \text{ ad } \left(-\frac{1}{\nu}\tilde{h}_{\alpha\beta}(\nu^2)\right) : \mathcal{C}_{U_{\alpha\beta}} \to \mathcal{C}_{U_{\beta\alpha}} \tag{16}$$

とおく。条件(15)から

$$\widehat{\Phi}_{\beta\alpha}\widehat{\Phi}_{\alpha\beta} = 1, \quad \widehat{\Phi}_{\gamma\alpha}\widehat{\Phi}_{\beta\gamma}\widehat{\Phi}_{\alpha\beta} = 1$$

が得られる。これより M 上に局所自明なコンタクト代数束 $\mathcal{C}_M$ が得られたことになる。また構成の仕方から明らかなように $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta}$ をワイル束 $W_{U_{\alpha\beta}}$ に制限すればワイル多様体 W_M の貼りあわせとなっているから $\mathcal{C}_M$ は W_M を部分束として含んでいる。

定理 6 ([Y]) 任意のワイル多様体 W_M に対し, W_M を部分束として含む M 上のコンタクト代数束 $\mathcal{C}_M$ が存在する。

4.2 Poincaré-Cartan クラスを実現する接続

コンタクト代数束の局所自明化を $\widehat{\Phi}_\alpha : \mathcal{C}_{V_\alpha} \to \mathcal{C}_{U_\alpha}$ とし, 貼りあわせを $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta} = \widehat{\Phi}_\beta\widehat{\Phi}_\alpha^{-1} : \mathcal{C}_{U_{\alpha\beta}} \to \mathcal{C}_{U_{\beta\alpha}}$ とおく。

M 上の外積代数束 Λ_M と $\mathcal{C}_M$ のテンソル積 $\Lambda_M \otimes \mathcal{C}_M$ を考える。その局所自明表示を $\Lambda_{U_\alpha} \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha}$ とし滑らかな切断の空間を $\Gamma(\Lambda_{U_\alpha} \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ と記す。局所的な線形作用素 $\delta_\alpha : \Gamma(\Lambda^k_{U_\alpha} \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha}) \to \Gamma(\Lambda^{k+1}_{U_\alpha} \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ を $\delta_\alpha = \sum_{pq} dz^p_\alpha \omega_{pq} \text{ ad } \left(\frac{1}{\nu} Z^q\right)$ で定義する。すると ν は W の中心だから $\delta_\alpha(\nu) = 0$, ad $\left(\frac{1}{\nu} Z^q\right)(Z^i) = \Lambda^{qi}$ だから $\delta_\alpha Z^i = dz^i_\alpha$, $i = 1, 2, \cdots, 2n$ そして定義式(11)から ad $\left(\frac{1}{\nu} Z^q\right)(\tau) = Z^q$ となるから $\delta_\alpha \tau = \sum_{pq} dz^p_\alpha \omega_{pq} Z^q$ が得られる。また $df = df \otimes 1$, $f \in C^\infty(U_\alpha)$ だから $\delta_\alpha df = 0$ である。これらを用いて

$$\delta_\alpha(F \wedge G) = \delta_\alpha(F) \wedge G + (-1)^p F \wedge \delta_\alpha(G)$$

$F \in \Gamma(\Lambda^p(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$, $G \in \Gamma(\Lambda^q(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ を示すことが出来る。さらに外微分作用素を $\Gamma(\Lambda(U_\alpha))$ から $\Gamma(\Lambda(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ へ

$$d(\nu) = 0, \ dZ^i = 0, (i = 1, 2, \cdots, 2n), \ d\tau = 0$$

そして

$$d(F \wedge G) = dF \wedge G + (-1)^p F \wedge dG,$$

$F \in \Gamma(\Lambda^p(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$, $G \in \Gamma(\Lambda^q(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ とおくことにより拡張する。

さて任意の $\Xi_\alpha = \Xi_\alpha^{(0)} + \nu^2 \Xi_\alpha^{(2)} + \cdots + \nu^{2k} \Xi_\alpha^{(2k)} + \cdots \in \Lambda^1(U_\alpha)[[\nu^2]]$ をとり, 線形作用素 $\partial_\alpha : \Gamma(\Lambda^k(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha}) \to \Gamma(\Lambda^{k+1}(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ を

$$\partial_\alpha = -d + \delta_\alpha + \mathrm{ad}\,(\frac{1}{\nu}\,\Xi_\alpha). \tag{17}$$

により定義する。すると δ, d の性質を用いて $F \in \Gamma(\Lambda^p(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$, $G \in \Gamma(\Lambda^q(U_\alpha) \otimes \mathcal{C}_{U_\alpha})$ に対して $\partial_\alpha(F \wedge G) = \partial_\alpha F \wedge G + (-1)^p F \wedge \partial_\alpha G$ が成立する。次の命題が得られる。

命題 4 (i) $\partial_\alpha^2|_{\Gamma(W_{U_\alpha})} = 0$. (ii) $\partial_\alpha(f^\#) = 0,\ \forall f^\# \in \mathcal{F}(W_{U_\alpha})$.

証明. (i) は W_{U_α} の成生元 ν, Z^i について $\partial_\alpha^2 = 0$ がいえることから明らかである。また Ξ_α は W の中心と 1-微分形式のテンソル積だから $\mathrm{ad}\,(\frac{1}{\nu}\,\Xi_\alpha)(W_{U_\alpha}) = 0$ が成り立ち $\partial_\alpha(z^{i\#}) = 0$, $(i = 1, \cdots, 2n)$ が得られ, $z^{i\#}$ $(i = 1, \cdots, 2n)$ の多項式が $\mathcal{F}(W_{U_\alpha})$ の中で dense であることから (ii) が得られる。（QED)

さて前節の (15) の部分で与えられた $h_{\alpha\beta} \in C^\infty(M)[[\nu^2]]$ を用いて $\exp\,\mathrm{ad}\,\left(\frac{1}{\nu}\,h_{\alpha\beta}\right) \in C^\infty(M)[[\nu^2]]$ を導入し

$$\exp\,\mathrm{ad}\,\left(\frac{1}{\nu}\,h_{\alpha\beta}\right) \tau = \tau + \hat{h}_{\alpha\beta} \tag{18}$$

により $h_{\alpha\beta} \in C^\infty(M)[[\nu^2]]$ を定義する。各 $V_\alpha \cap V_\beta\,(\neq \emptyset)$ 上で

$$\xi_\beta = \xi_\alpha + d\,\hat{h}_{\beta\alpha}. \tag{19}$$

をみたす 1-微分形式の族 $\{\xi_\alpha\} \subset \Lambda^1(V_\alpha)[[\nu^2]]$ をとる。(例えば単位の分解を使って $\xi_\alpha = \sum_\lambda d\,\hat{h}_{\alpha\lambda}\,\chi_\lambda$ とおけばよい。) 開集合 U_α に対し式 (12) で与えた切断を $\tau_\alpha = \tau + \sum_{ij} z_\alpha^i \omega_{ij} Z^j \in \Gamma(\mathcal{C}_{U_\alpha})$ とおく。

補題 5 *1*-微分形式 $\Xi_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha)[[\nu^2]]$ で

$$\partial_\alpha \tau_\alpha = \left(-d + \delta_\alpha + ad(\frac{1}{\nu}\,\Xi_\alpha)\right) \tau_\alpha = \xi_\alpha \tag{20}$$

をみたすものがただ一つ存在する。

証明. まず, $\theta_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{ij} z_\alpha^i \omega_{ij} dz_\alpha^j$ と $\hat{\theta}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{ij} dz_\alpha^i \omega_{ij} Z^j$ とおく。この節のはじめで見たように $\delta_\alpha \tau = 2\,\hat{\theta}_\alpha$, $\delta_\alpha\, Z^j = dz_\alpha^j$ であるから

$$\delta_\alpha \tau_\alpha = \delta_\alpha \tau + \sum_{pq} z_\alpha^p \omega_{pq} \delta_\alpha Z^q = 2\,\hat{\theta}_\alpha + 2\,\theta_\alpha.$$

また $d\tau_\alpha = 2\hat{\theta}_\alpha$ であることから $(-d+\delta_\alpha)\tau_\alpha = 2\theta_\alpha$ が得られる。よって

$$\partial_\alpha \tau_\alpha = (-d + \delta_\alpha + \mathrm{ad}\,(\frac{1}{\nu}\Xi_\alpha))\tau_\alpha = 2\theta_\alpha + [\frac{1}{\nu}\Xi_\alpha, \tau]$$

したがって $\Xi_\alpha = \Xi_\alpha^{(0)} + \nu^2\Xi_\alpha^{(2)} + \cdots + \nu^{2k}\Xi_\alpha^{(2k)} + \cdots$ に関する方程式は

$$[\tau, \frac{1}{\nu}\Xi_\alpha] = -\sum_{k=0}^{\infty} 2(2k-1)\nu^{2k}\Xi_\alpha^{(2k)} = 2\theta_\alpha - \xi_\alpha$$

となり解をただ一つ持つことがわかる。(QED)

このように定めた ∂_α が変換 $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta}$ に関して共変性を持つことが示せる。すなわち変換を $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta*}\partial_\alpha(F) = \widehat{\Phi}^{*-1}_{\alpha\beta}\partial_\alpha\widehat{\Phi}^{*}_{\alpha\beta}(F)$, $\forall F \in \Gamma(\mathcal{C}_{U_\beta})$ とすると

命題 5 $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta*}\partial_\alpha = \partial_\beta$

したがって $\{\partial_\alpha\}$ は $\partial|_{\Gamma(\mathcal{C}_{U_\alpha})} = \partial_\alpha$ より大域的な接続 ∂ を定義する。定義 (19) から $\{\xi_\alpha\}$ は大域的な 2-微分形式 $\Omega_M(\nu^2) = d\xi_\alpha \in \Lambda^2_M[[\nu^2]]$ を定める事が分かる。さらにコホモロジークラスは

$$\left(\exp \mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}[\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}]\right)\tau - \tau = \left(\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}[\{c_{\alpha\beta\gamma}(\nu^2)\}]\right)\tau$$

と等しいことが (15)(19) から得られ, $[\Omega_M(\nu^2)] = \left(\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}c(W_M)\right)\tau$ が得られる。また補題 5 の証明と同様にして $\Omega_M(\nu^2) = \left(\mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\Omega(W_M)(\nu^2)\right)\tau$ なる $\Omega(W_M)(\nu^2) \in \Lambda^2_M[[\nu^2]]$ がただ一つ存在することが分かり, したがってコホモロジークラスの等式 $[\Omega(W_M)(\nu^2)] = c(W_M)$ が得られる。一方各 U_α 上で $\partial_\alpha^2\tau_\alpha = d\xi_\alpha = \Omega_M(\nu^2)$ であることから ∂ は曲率を $\Omega(W_M)(\nu^2)$ にもつ, すなわち $\partial^2 = \mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\Omega(W_M)(\nu^2)$ であることが示される。以上から次の定理を得る。

定理 7 ([Y]) (i) $\mathcal{C}_M$ 上に, 曲率の定めるコホモロジークラスが $c(W_M)$ と等しい接続 ∂ が存在する。すなわち閉 2-微分形式 $\Omega(W_M)(\nu^2) \in \Lambda^2_M[[\nu^2]]$ が存在して

$$\partial^2 = \mathrm{ad}\,\frac{1}{\nu}\Omega(W_M)(\nu^2), \quad [\Omega(W_M)(\nu^2)] = c(W_M)$$

をみたす。

(ii) $F \in \Gamma(W_M)$ がワイル関数 $F \in \mathcal{F}(W_M)$ であるための必要十分条件は $\partial(F) = 0$ が成立することである。

(iii) ∂ をワイル多様体 W_M に制限したものすなわち $\partial|_{\Gamma(W_M)}$ は Fedosov connection を与える。

参考文献

[BFFLS] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and Sternheimer, D.: *Deformation theory and quantization I*, *Ann. of Phys.* **111** (1978), 61-110.

[BCG] Bertelson, M., Cahen, M. and Gutt, S.: *Equivalence of star products. Geometry and physics. Classical Quantum Gravity* **14** (1997), A93–A107.

[D] Deligne, P.: *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique: comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte. Selecta Math.* (N.S.) **1** (1995), 667–697.

[DL] De Wilde, M. and Lecomte, P.B.: *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 487-496.

[F] Fedosov, B. V.: *A simple geometrical construction of deformation quantization*, *J. Differential Geom.* **40** (1994), 213-238.

[GR] Gutt, S. and Rawnsley, J. : *Equivalence of star products on a symlectic manifold; an introduction of Deligne's Čech cohomology classes*, *J. Geom. Phys.* **29** (1999), 347-392.

[K] Kontsevich, M.: *Deformation quantization of Poisson manifolds*, q-alg/9709040.

[OMY] Omori, H., Maeda, Y. and Yoshioka, A.: *Deformation quantization and Weyl manfiolds*, *Advances in Mathematics* **85** (1991), 224-255.

[OMMY] Omori, H., Maeda, Y., Miyazaki, Naoya and Yoshioka, A.: *Poincaré-Cartan class and deformation quantization of Käler manifolds*, *Comm. Math. Phys.* **194** (1998), 207–230.

[W] Weinstein, A.: *Deformation quantization. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94*. Astérisque No. **227**, (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409.

[X] Ping, X.: *Fedosov $*$-products and quantum momentum maps. Comm. Math. Phys.* **197** (1998), 167–197.

[Y] Yoshioka, A.: *Contact Structure on Weyl manifold and Deformation quantization. (in preparation).*